5+5

Teste 3

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS.
FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL.
CÁLCULO COMBINATÓRIO.
PROBABILIDADES

Soluções

Grupo I

1. (A)

2. (D)

3. (B)

4. (B)

5. (C)

Grupo II

1.

a) Em 1992.

b) 92

2.

a) Tem-se:

- f é contínua em $]-\infty, 1[$ pois é soma de funções contínuas;
- f é contínua em $]1, +\infty[$ pois é quociente de funções contínuas.

Vejamos que f é contínua no ponto 1.

Tem-se:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2\,e^{x-1} - x + 3) = 2 - 1 + 3 = 4$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(4x-3)}{x-1}$ Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

  Para a levantar, façamos a mudança de variável $y = \ln(4x-3)$.
  Quando $x \to 1$ tem-se que $y \to 0$.
  Além disso, $y = \ln(4x-3) \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y + 3}{4}$

Vem, então:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(4x-3)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{e^y+3}{4}-1} = \lim_{y\to 0}\frac{4y}{e^y-1} = 4\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} =$$

$$= 4\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = 4\times\frac{1}{1} = 4$$

- $f(1) = 4$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, a função f é contínua no ponto 1.

Assim, f é uma função contínua.

b) A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f , em $+\infty$.

A reta de equação $y = -x+3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f , em $-\infty$.

c) A função g é decrescente em $]-\infty, 1-\ln(2)]$ e é crescente em $[1-\ln(2)\,,\,1]$; atinge um mínimo relativo para $x = 1-\ln(2)$ e atinge um máximo relativo para $x = 1$.

3.

a) $]-\ln(5), \ln(5)[$

b) O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{1}{2}\,,\,1\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão cuja abcissa é 1.

4. Tem-se, de acordo com o enunciado, que $P(A) = P(\overline{B})$. Vem, então:

$$P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) - P(A\cap B) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} - P(A\cap B) = \frac{P(\overline{A\cup B})}{P(A)} - P(A\cap B) =$$

$$= \frac{1-P(A\cup B)}{P(A)} - P(A\cap B) = \frac{1-P(A\cup B)-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)} =$$

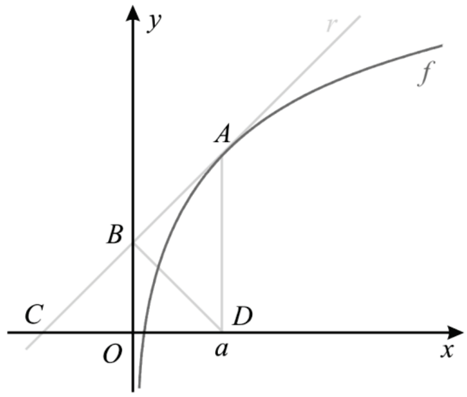
$$= \frac{1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) \times [1 - P(A)]}{P(A)} = \frac{P(\overline{B}) - P(A) + P(A \cap B) \times [1 - P(\overline{B})]}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A) - P(A) + P(A \cap B) \times P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) \times P(B)}{P(A)} = P(B) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= P(B) \times P(B|A)$$

5. A figura ao lado ilustra a situação.



Como o triângulo $[ACD]$ é isósceles e retângulo, tem-se $A\widehat{C}D = 45°$, pelo que:

- a reta r tem declive igual a 1;
- $\overline{OC} = \overline{OB}$.

Como o triângulo $[BCD]$ é retângulo, tem-se que $BD \perp r$, pelo que a reta BD tem declive igual a -1, donde vem que $B\widehat{D}O = 45°$.

Portanto, $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD} = a$, pelo que $\overline{CD} = 2a$, donde vem $\overline{AD} = 2a$.

Tem-se, portanto, $f(a) = 2a$, ou seja, $\boxed{p \log_q (a) = 2a}$

Por outro lado, como a reta r é tangente ao gráfico da função f , no ponto de abcissa a , o seu declive é igual a $f'(a)$.

Tem-se $f'(x) = (p \log_q (x))' = \frac{p}{x \ln(q)}$ pelo que $f'(a) = \frac{p}{a \ln(q)}$.

Como o declive da reta r é igual a 1, tem-se $\frac{p}{a \ln(q)} = 1$, donde vem: $\boxed{p = a \ln(q)}$

Tem-se, assim: $\boxed{p \log_q (a) = 2a}$ e $\boxed{p = a \ln(q)}$. Vem então:

$$p \log_q (a) = 2a \Leftrightarrow \frac{p \ln(a)}{\ln(q)} = 2a \Leftrightarrow \frac{a \ln(q)\ \ln(a)}{\ln(q)} = 2a \Leftrightarrow a \ln(a) = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(a) = 2 \Leftrightarrow a = e^2$$